ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЭЙЛЕРОВЫХ КАКТУСОВ

А.К. Мелешко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
akmeleshko@gmail.com

Геодезический граф – это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической) [1]. Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле [2, С. 93]. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы. Эйлеров граф – это связный граф, все вершины которого имеют четную степень [2, С. 22]. Эйлеровы графы являются графами без мостов [3]. Планарный граф – это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. Два графа называются гомеоморфными, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

Помеченные эйлеровы кактусы перечислены в [3]. В работе [4] перечислены помеченные геодезические кактусы.

Лемма. *Все помеченные геодезические эйлеровы кактусы – графы с нечетным числом вершин.*

Доказательство. Используем индукцию по числу блоков. Пусть геодезический эйлеров кактус состоит из одного блока. Стемпл и Уотсон [1] доказали, что граф является геодезическим планарным только тогда, когда каждый его блок – ребро, нечетный цикл или граф, гомеоморфный полному графу K_4. Так как кактусы являются планарными графами, а эйлеровы графы – графы без мостов, то блоки геодезического эйлерова кактуса – нечетные циклы. Следовательно, для геодезического эйлерова кактуса, состоящего из одного блока, лемма верна.

Допустим, что лемма верна для графа, состоящего из k блоков, $k \geq 1$, и докажем, что она верна для графа, состоящего из $k+1$ блоков. Пусть геодезический эйлеров кактус, состоящий из k блоков, имеет нечетное число вершин n. Тогда к любой вершине кактуса присоединим блок с нечетным числом вершин m и получим граф, состоящий из $k+1$ блоков. Вершина кактуса, к которой присоединили блок, будет точкой сочленения. Следовательно, геодезический эйлеров кактус, состоящий из $k+1$ блоков, имеет нечетное число вершин: $m+n-1$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть GE_n – число помеченных геодезических эйлеровых кактусов с n вершинами, тогда при $p \geq 1$ верна формула*

$$GE_{2p+1} = (2p)! \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p+1)^{k-1}}{2^k k!} \binom{p-1}{k-1}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть C_n – число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n – число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию: $B(z) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$.

В работе [5] автором было получено соотношение

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где $[z^{-1}]$ – оператор формального вычета [6, С. 25].

Обозначая через $\bar{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных геодезических эйлеровых кактусов, получим

$$GE_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}'(z)) z^{-n}.$$

Так как, согласно лемме у геодезических эйлеровых кактусов не может быть блоков с четным числом вершин, то

$$\bar{B}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(2n)!\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\bar{B}'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}z^{2n}=\frac{z^2}{2(1-z^2)}$$

Следовательно,

$$GE_n=\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp\Big(\frac{nz^2}{2(1-z)}\Big)z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$GE_n=(n-1)![z^{-1}]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}z^{2k-n}}{2^k(1-z^2)^k k!}.$$

Используя известный ряд [7, С.141]

$$(1-z)^{-r}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k-1}z^m,$$

получим

$$GE_n=(n-1)![z^{-1}]\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}z^{2k-n+2m}}{2^k k!}\binom{m+k-1}{k-1}.$$

Найдем решение уравнения $2k+2m-n=-1$ в целых числах. Так как не существует геодезических эйлеровых кактусов с четным числом вершин, то $n=2p+1$. Тогда $2k+2m-(2p+1)=-1$ и $m=p-k$.

Вычислив вычет функции, найдем

$$GE_{2p+1}=(2p)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2p+1)^{k-1}}{2^k k!}\binom{p-1}{k-1}.$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при $p-1<k-1$, получим утверждение теоремы.

Автор благодарит В.А. Воблого за ценные замечания.

Литература

1. Stemple J. G., Watkins M. E. *On planar geodetic graphs* // J. Combin. Theory. 1968. Vol. 4. P. 101–117.

2. Харари Ф., Палмер Э. *Перечисление графов.* М.: Мир, 1977.

3. Воблый В. А. *Перечисление помеченных эйлеровых кактусов* // Материалы XI Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. М.: МГУ, 2012. С. 275–277.

4. Воблый В. А. *Перечисление помеченных геодезических планарных графов* // Математические заметки. 2015. Т. 97. № 3. С. 336–341.

5. Воблый В. А. *Об одной формуле для числа помеченных связных графов* // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. №4. С. 48–59.

6. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика.* М.: Наука, 1990.

7. Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.* М.: Наука, 1982.